<u>Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις, Ιούνιος 2024</u>

Θέμα 1

(i) Θεωρούμε τη γραμμική δ.ε

$$x^2y'' + 3xy' + \lambda y = 0,\ y(1) = 0$$

(a) [1.5] Να λυθεί η εξίσωση.

(b) [0.5] Αν λ_1, λ_2 είναι δύο ιδιοτιμές του προβλήματος συνοριακών τιμών που απαρτίζεται από την εξίσωση και τις συνοριακές συνθήκες

$$y(1) + 2y'(1) = 0,\ \ 2y(3) - 5y'(3) = 0$$

να δοθεί η έκφραση ορθογωνιότητας των ιδιοσυναρτήσεων y_1, y_2 που αντιστοιχούν στις λ_1, λ_2, αντίστοιχα και να διατυπωθεί στη γενικότητά της η πρόταση που χρησιμοποιήθηκε.

(ii) [0.5] Για μια ομογενή γραμμική δ.ε δεύτερης τάξεως (Ε) που ορίζεται στο διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, να εξετασθεί η ισχύς της πρότασης:
«Υπάρχουν λύσεις y_1, y_2, y_3 της εξίσωσης (Ε) και σημείο $x_0 \in I$ ώστε για την ορίζουσα Wronski των y_1, y_2, y_3 να ισχύει $W(y_1, y_2, y_3)(x_0) \neq 0$ ».

Θέμα 2

Θεωρούμε το π.α.τ

$$y'(x) = x^2 + y^4(x),\ y(1) = 2$$

(i) [1.4] Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο των λύσεων το παραπάνω π.α.τ στο διάστημα $I = \left[\frac{15}{16}.\frac{17}{16}\right]$. Να διατυπωθεί το Θεώρημα που χρησιμοποιήθηκε και να εξετασθεί αν το διάστημα I μπορεί να διευρυνθεί.

(ii) [0.6] Να βρεθούν οι δύο πρώτες προσεγγίσεις της λύσης και να δοθεί μια ολοκληρωτική8 έκφραση της τρίτης προσέγγισης.

(iii) [0.5] Να δοθεί μια εκτίμηση του αριθμού των διαδοχικών προσεγγίσεων που απαιτούνται για σφάλμα μικρότερο από $\frac{1}{10}$.

Θέμα 3

Θεωρούμε την ομογενή γ.δ.ε

$$L[y](x) := a_3(x)y'''(x) + a_2y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \qquad (\star)$$

όπου $a_i \in C(I),\ i = 1, 2, 3$ και $a_3(x) \neq 0,\ x \in I$.

(i) [1.3] Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το Θεώρημα υποβιβασμού της τάξης για την $(\star)$.

(ii) [0.6] Να αποδειχθεί ότι αν y_1, y_2 είναι λύσεις της $(\star)$ με $y_2(x) \neq 0,\ \forall\, x \in I$, τότε η συνάρτηση $u(x) := \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}, x \in I$ είναι μια λύση της ομογενούς γ.δ.ε στην οποία ανάγεται η $(\star)$ μετά τον υποβιβασμό τάξης με χρήση της y_2.

(iii) [0.6] Να περιγραφεί ένας τρόπος επίλυσης της εξίσωσης $(\star)$ αν είναι γνωστές δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της y_1, y_2 με $y_2(x) \neq 0,\ \forall\, x \in I$.

Θέμα 4

(i) [0.6] Να δοθεί ο ορισμός της συνάρτησης εκθετικής τάξης και να εξετασθεί αν η συνάρτηση $\ln(x+1),\ x \geq 0$ έχει μετασχηματισμό Laplace.

(ii) [0.8] Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $g(x) = e^{\frac{1}{2}[x]},\ x \geq 0$ (όπου $[x]$ το ακέραιο μέρος του x).

(iii) Αποκλειστικά με χρήση του μετασχηματισμού Laplace να περιγραφεί ένας τρόπος:

(a) [0.4] εύρεσης του βασικού συνόλου λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς της γ.δ.ε

$$y'' - 5y' + 4y = \ln(t+1),\ t \geq 0$$

(b) [0.4] επίλυσης της εξίσωσης

(iv) [0.4] Να υποδειχθεί ένας διαφορετικός τρόπος επίλυσης της εξίσωσης από αυτόν που δόθηκε παραπάνω.

Θέμα 5

(i) [0.6] Αν για την εξίσωση $y''(x) + 2xy'(x) + y(x) = 0,\ x \in I$ είναι γνωστό ότι μια λύση της έχει ακριβώς δέκα ρίζες, χαρακτηρίστε ως Σωστές ή Λάνθασμένες (με πλήρη αιτιολόγηση) τις παρακάτω προτάσεις:

(a) Κάθε άλλη λύση γραμμικά ανεξάρτητη της y_1 έχει το πολύ οκτώ ρίζες.

(b) Υπάρχει λύση $y_2 \neq y_1$ της εξίσωσης με ακριβώς δέκα ρίζες.

(c) Κάθε άλλη λύση y_2 γραμμικά ανεξάρτητη της y_1 έχει τουλάχιστον εννέα ρίζες.

(d) Κάθε άλλη λύση y_2 γραμμικά ανεξάρτητη της y_1 έχει το πολύ έντεκα ρίζες.

(ii) [0.8+0.6] Αν για τη δ.ε $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ έχουμε ότι η παράσταση $\dfrac{M_y - N_x}{yN - xM}$ είναι συνάρτηση του xy, τότε να αποδειχθεί ότι η δ.ε έχει έναν ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\phi(xy)$ και να υποδειχθεί ένας τρόπος υπολογισμού του.
Εφαρμογή: Να βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\phi(xy)$ για την εξίσωση:

$$(xy^3 + 2x^2y^2 - y^2) + (x^2y^2 + 2x^3y - 2x^2)y' = 0.$$

(iii) [0.7] Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση

$$xy'' - (x+n)y' + ny = 0,\ x \in I := [0, +\infty)\ (n \in \mathbb{N})(\star\star)$$

δέχεται μια εκθετική και μια πολυωνυμική λύση. Είναι οι εν λόγω λύσεις γραμμικά ανεξάρτητες;

(iv) [0.4] Αφού διαπιστωθεί ότι για $n = 2$ οι συναρτήσεις $y_1(x) = e^x$ και $y_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2},\ x \in I$ είναι λύσεις της εξίσωσης $(\star\star)$ που ικανοποιούν τις αρχικές τιμές $y(0) = y'(0) = 1$, να εξετάσετε αν η διαπίστωση έρχεται σε αντίφαση με τα θεωρήματα ύπαρξης και μονοσημάντου αναφορικά με π.α.τ γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.

Να δοθούν απαντήσεις σε τέσσερα θέματα

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ